Конспект лекции по теории структурных автоматов.

(лектор – проф. В.Б. Кудрявцев)

Пусть $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ – конечный или счетный алфавит, $\xi = c(1)c(2)\dots c(l)$ – слово в нем, а C^* – множество всех таких слов, $l = 1, 2, \dots$. Через $|\xi|$ обозначаем длину l слова ξ. Начало $c(1)\dots c(r)$ слова ξ при $r \leq l$ называем префиксом слова ξ и обозначаем $\xi]_r$, а конец $c(r+1)\dots c(l)$ слова ξ называем его суффиксом и обозначаем $[_{l-r}\xi$.

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ – конечные алфавиты, называемые входным и выходным, соответственно. Рассмотрим отображение $f : A^* \to B^*$, которое называем словарной функцией.

Функцию f называем детерменированной (для краткости д.функцией), если всегда $|f(\alpha)| = |\alpha|$, а при $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ и $\alpha' = \alpha_1\alpha_3$ выполнено $f(\alpha)]_{|\alpha_1|} = f(\alpha')]_{|\alpha_1|}$.

Для д.функции f и α из A^* называем д.функцию $f_\alpha(\alpha') = [_{|\alpha'|}f(\alpha\alpha')$ остаточной.

Говорим, что д.функция f является ограниченно-детерминированной (о.д.функцией), если у f конечное множество остаточных функций.

Класс всех д.функций обозначим $P_g^{A,B}$, а класс всех о.д.функций – через $P_{og}^{A,B}$.

Особый интерес вызывает класс $P_{og}^{A,B}$. С точки зрения приложений важно такое представление д.функций. Полагаем, что $A = E_k^m$, $B = E_k^n$, где $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, тогда слово $\alpha = a(1)a(2)\dots a(l)$ можно переписать в виде $\alpha = \vec{a}(1)\vec{a}(2)\dots\vec{a}(l)$, где $\vec{a}(i) = (a_{11}(i), a_{12}(i), \dots, a_{1m}(i))$, то есть

$$\alpha = \underset{T}{\begin{pmatrix} \vec{a}(1) \\ \vec{a}(2) \\ \vdots \\ \vec{a}(l) \end{pmatrix}} = \underset{T'}{\begin{pmatrix} a_{11}(1) & a_{12}(1) & \dots & a_{1m}(1) \\ a_{21}(2) & a_{22}(2) & \dots & a_{2m}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1}(l) & a_{l2}(l) & \dots & a_{lm}(l) \end{pmatrix}} = \underset{T''}{\begin{pmatrix} a_{11}(1) & a_{12}(1) & \dots & a_{1m}(1) \\ a_{21}(2) & a_{22}(2) & \dots & a_{2m}(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l1}(l) & a_{l2}(l) & \dots & a_{lm}(l) \end{pmatrix}}.$$

Значит, матрицу можно представлять себе заданной либо в виде строк, как в матрице T', либо в виде матрицы столбцов, как в матрице T''. Последнее и будет для нас основным представлением слова α. Анналогично поступаем со словами β.

Важно отметить теперь, что слова α и β становятся декартовыми степенями слов одинаковой длины, соответственно, из E_k^*.

Эти допущения позволяют считать д.функцию $f(x)$, где x принимает значения из A^*, д.функцией $f(x_1, \dots, x_m)$, где x_i со значениями из E_k^*, $i = 1, \dots, m$. Аналогично значениями у д.функции $f(x)$ теперь можно считать не слова из B^*, а вектор $(y_1, \dots, y_n)$, где y_j со значениями из E_k^*, $j = 1, \dots, n$.

Таким образом о.д.функцию $f(x) = y$ теперь рассматриваем как

$$f(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n), \qquad (*)$$

где x_i и y_i со значениями из E_k^*.

Система канонических уравнений (к.уравнений) для $(*)$ получается из системы к.уравнений для $f(x) = y$ переходом к векторной записи по x и y. (Сделать это самостоятельно!)

Пусть $P_{og,k} = \bigcup_{\forall m, \forall n} P_{og}^{E_k^m, E_k^n}$. В классе $P_{og,k}$ введем следующие операции, для описания которых используем схемную интерпретацию.

1) *Операция переименования переменного* x_i.

Если заданы $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n)$ и x_j, где $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, то рассматриваем новую о.д.функцию $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m, x_j) = (y'_1, \dots, y'_n)$, которая задается системой к.уравнений, получающихся из системы к.уравнений для f заменой в них всюду переменного x_i на x_j. (см. Рис.1.)

2) *Операция отождествления переменных* x_i *и* x_j.

Вновь, как в 1), заданы f и переменное x_i. Пусть x_j такое, что $j \neq i$ и $1 \leq j \leq m$. Рассмотрим новую о.д.функцию $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m) = (y'_1, \dots, y'_n)$, если $j > i$, и о.д.функцию $g'(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n)$, если $j < i$.

К.уравнения, задающие эти функции, получаются из к.уравнений для о.д.функции f заменой в них всюду переменного x_i на x_j. (см. Рис.2.)

3) *Операция проектирования.*

Пусть имеем о.д.функцию $f(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n)$ и y_j, где $1 \leq j \leq m$. Рассматриваем о.д.функцию $g(x_1, \dots, x_m) = (y'_1, \dots, y'_{j-1}, y'_{j+1}, \dots, y'_n)$, к.уравнения которой получаются из к.уравнений для f удалением уравнения $y_j(t) = \tilde{\psi}_j(q(t), x_1(t), \dots, x_m(t))$. (см. Рис.3.)

4) *Операция дублирования.*

Пусть даны f и y_{n+1} как в 3). Рассматриваем новую о.д.функцию $g(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$, к.уравнения которой получаются дописыванием к к.уравнениям для f уравнения $y_{m+1}(t) = \tilde{\psi}_j(q(t), x_1(t), \dots, x_m(t))$. (см. Рис.4.)

5) *Операция объединения.*

Пусть даны f и g, зависящие от непересекающихся множеств переменных $f(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n)$, $g(x'_1, \dots, x'_{m'}) = (y'_1, \dots, y'_{n'})$. Рассматриваем о.д.функцию $h(x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_{m'}) = (y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_{n'})$, к.уравнения которой получаются объединением к.уравнений для f и g. (см. Рис.5.)

6) *Операция подстановки.*

Пусть даны о.д.функции $f(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_j, \dots, x_n)$ и $g(x'_1, \dots, x'_l, \dots, x'_{m'}) = (y'_1, \dots, y'_{n'})$.

Рассматриваем о.д.функцию

$h(x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_{i-1}, x'_{i+1}, \dots, x'_{m'}) = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_{m'})$,
к.уравнения которой получаются из к.уравнений для f и h подстановкой $\tilde{\psi}_j(q(t), x_1(t), \dots, x_m(t))$ из к.уравнений для f вместо каждого переменного $x'_j(t)$ в к.уравнения для g и удалением из к.уравнений для f уравнения $y_j(t) = \tilde{\psi}_j(q(t), x_1(t), \dots, x_m(t))$. (см. Рис.6.)

7) *Операция обратной связи.*

Пусть дана о.д.функция $f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$ и у нее выделены x_j и y_j. Говорим, что y_j зависит с запаздыванием от x_i, если в некоторой к.системе уравнений для f выполнено $y_j(t) = \tilde{\psi}_j(q(t), x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_m)$.

Рассмотрим о.д.функцию
$g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_k)$, к.уравнения для которой получаются из к.уравнений для f подстановкой в нее всюду вместо $x_i(t)$ выражения $\tilde{\psi}_j(q(t), x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_m(t))$. (см. Рис.7.)

Операции 1)-6) называются операциями суперпозиции и обозначаем их через C, а операцию 7) - через O.

Объект $(P_{og,k}; C, O) = \mathcal{P}$ называем автоматной функциональной системой. Через $[\ ]_C$ и $[\ ]_{CO}$ обозначаем операторы замыкания множеств о.д.функций из $P_{og,k}$. В каждом случае под замыканием множества M понимаем все о.д.функции, которые получаются из M путем конечного применения операций из C или из C и O, соответственно.

Говорим, что о.д.функция f истинностная, если она может быть задана к.уравнениями с одним состоянием. Пусть I_k – множество всех таких о.д.функций. Такие о.д.функции можно рассматривать как вектор-функции к-значной логики, взятые во времени $t = 1, 2, \ldots$.

Пусть I_k^1 – множество всех одноразмерных о.д.функций из I_k, тогда этот класс полностью аналогичен P_k с временно́й интерпретацией, а операции 1), 2) и 6) для I_k^1 аналогичны операциям суперпозиции в P_k. Если $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ из I_k^1, то через $\tilde{f}(\tilde{x_1}, \ldots, \tilde{x_n})$ обозначаем соответствующую функцию из P_k. Пусть $M_0 = \{0, 1, \ldots, k-1, J_0(\tilde{x}), \ldots, J_{k-1}(\tilde{x}), \tilde{x_1} \vee \tilde{x_2}, \tilde{x_1} \& \tilde{x_2}\}$, а $\bar{M}_0$ – множество соответствующих истинностных о.д.функций. Нетрудно видеть, что справедливо следующее утверждение.

<u>Замечание.</u> Имеет место $[M_0]_C = I_k^1$.

Пусть $\xi_a(x) = y$ – о.д.функция, задаваемая такими к.уравнениями
$$\begin{cases} q(1) = a \\ q(t+1) = x(t)\ , \\ y(t) = q(t) \end{cases}$$

где $q \in E_k$; $\xi_a(x) = y$ называется единичной задержкой с начальным состоянием a.

Пусть $M = \bar{M}_0 \cup \{\xi_0(x) = y_0, \xi_1(x) = y_1, \ldots, \xi_{k-1}(x) = y_{k-1}\}$.

Теорема. Имеет место равенство $[M]_{CO} = P_{og,k}$.

Доказательство. Пусть о.д.функция $f(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_n)$ задана к.уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = q' \\ q(t+1) = \tilde{\varphi}(q(t), x_1(t), \ldots, x_m(t)) \\ y_j(t) = \tilde{\psi}_j(q(t), x_1(t), \ldots, x_m(t)), j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \qquad (**)$$

Пусть $Q = \{q', q'', \ldots, q^{(s)}\}$ – алфавит состояний о.д.функции f. Закодируем его элементы векторами вида $(c_1, \ldots, c_l)$, где $l = \log s + 1$. Тогда систему $(**)$ можно переписать так:

$$\begin{cases} c_i(1) = c^{(i)} \\ c_i(t+1) = \tilde{\varphi}_i(c_1(t), \ldots, c_l(t) x_1(t), \ldots, x_m(t)), i = 1, 2, \ldots, l, \\ y_j(t) = \tilde{\psi}_j(c_1(t), \ldots, c_l(t), x_1(t), \ldots, x_m(t)), j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \qquad (***) \ ,$$

где все параметры теперь уже со значениями из E_k.

Рассмотрим схемы для о.д.функций из I_k, как на Рис.8.

Блок S_1 означает о.д.функцию $g(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_l) = (y_1, \ldots, y_n)$, такую что

$g(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_l) = (\psi_1(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_l), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_l))$, а блок S_2 означает о.д.функцию $h(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_l) = (u_1, \ldots, u_l)$, такую что

$h(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_l) = (\varphi_1(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_l), \ldots, \varphi_l(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_l))$.

Ясно, что $g, h \in [M]$.

Ясно также, что с помощью операций 1)-7), используя блоки S_1 и S_2, можно построить схему, как на Рис.9, которая задает о.д.функцию f. Теорема доказана.

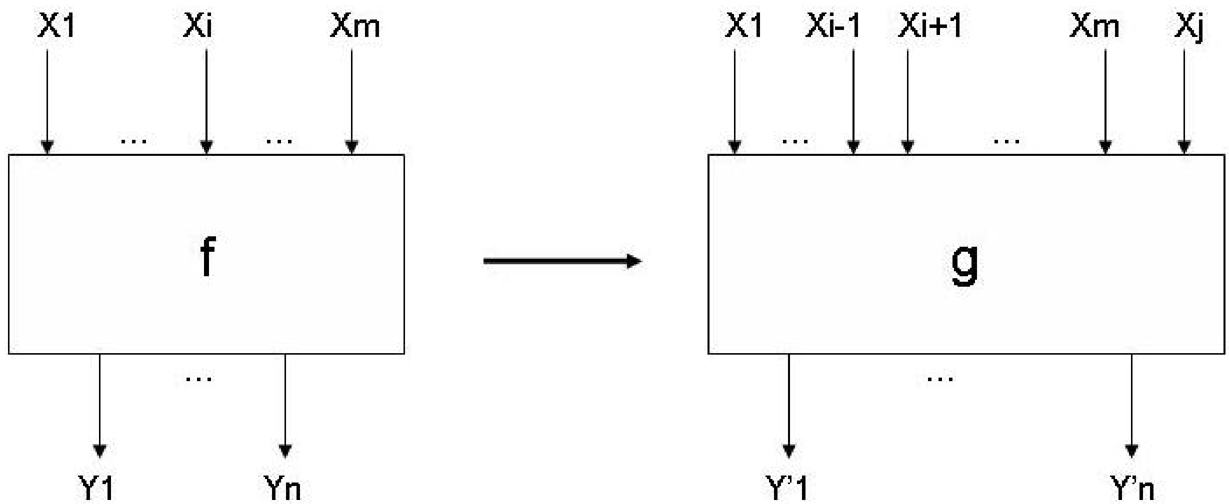
X1
Xi
Xm
f
Y1
Yn
X1
Xi-1
Xi+1
Xm
Xj
g
Y'1
Y'n

Рис. 1.

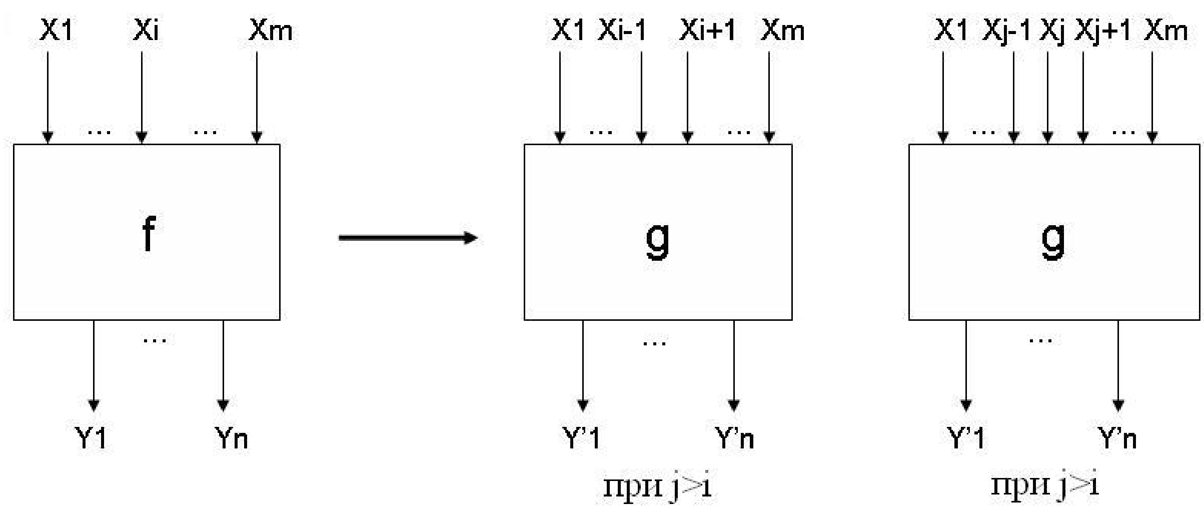
X1
Xi
Xm
f
Y1
Yn
X1 Xi-1
Xi+1
Xm
g
Y'1
Y'n
при j>i
X1 Xj-1 Xj Xj+1 Xm
g
Y'1
Y'n
при j>i

Рис. 2.

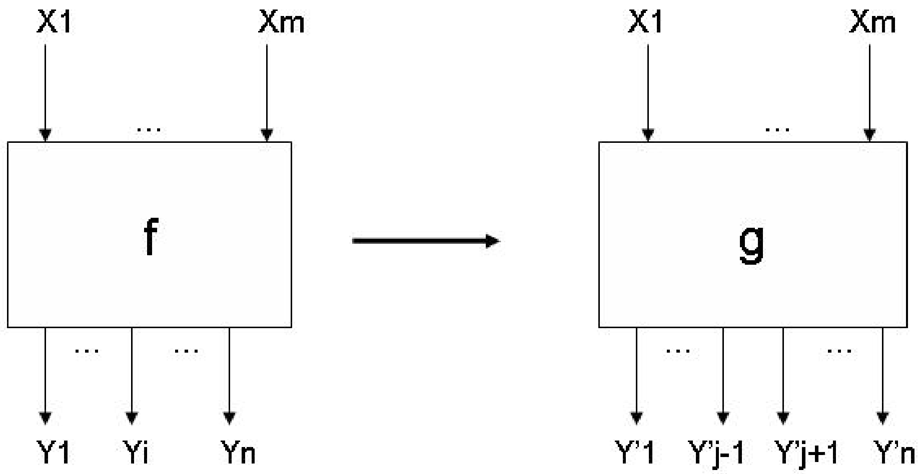
X1
Xm
f
X1
Xm
g
Y1
Yi
Yn
Y'1
Y'j-1
Y'j+1
Y'n

Рис. 3.

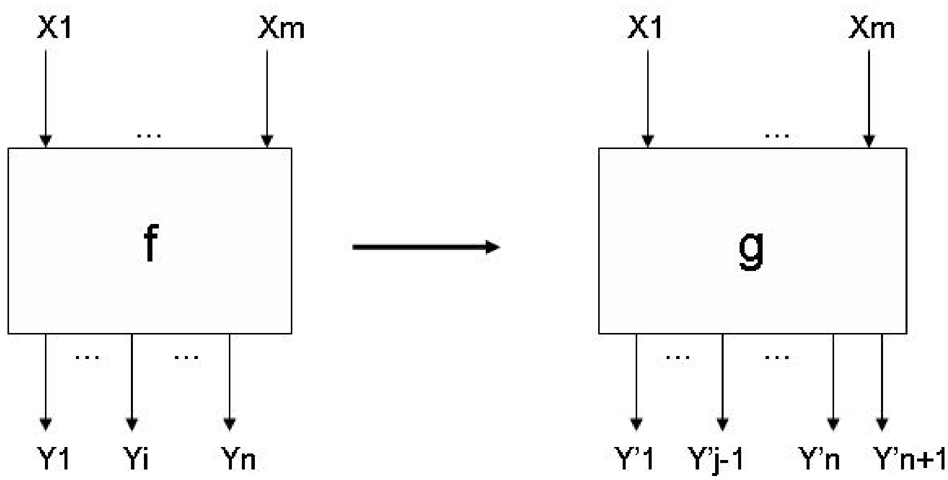
X1
Xm
f
X1
Xm
g
Y1
Yi
Yn
Y'1
Y'j-1
Y'n
Y'n+1

Рис. 4.

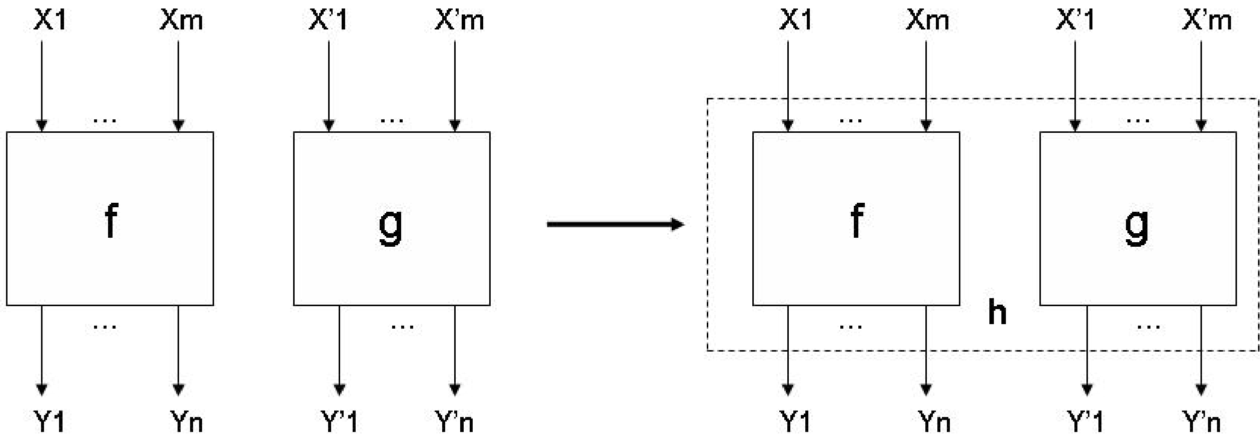
X1
Xm
X'1
X'm
f
g
h
Y1
Yn
Y'1
Y'n

Рис. 5.

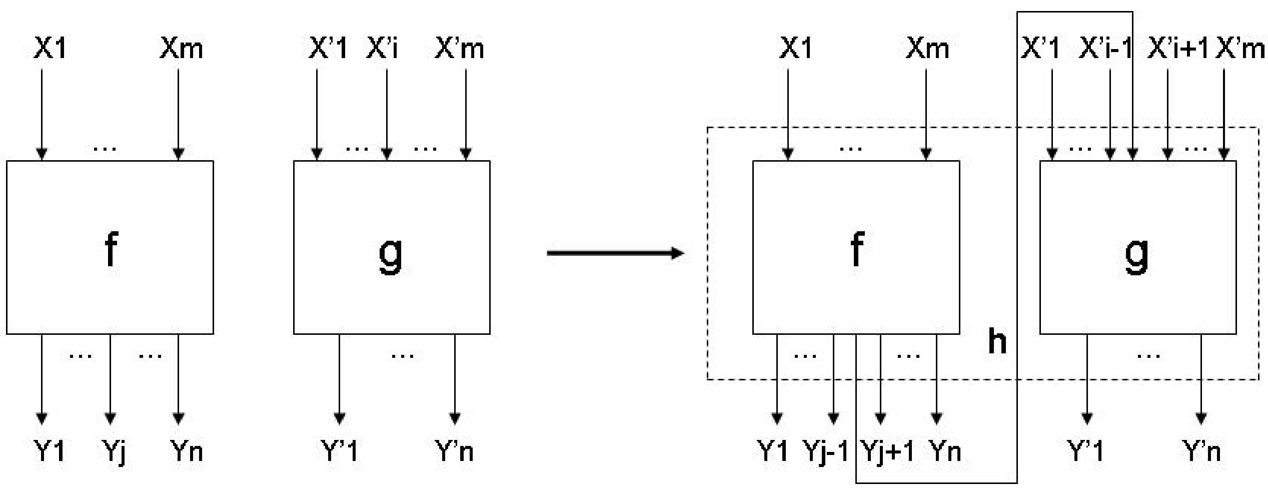
X1
Xm
X'1
X'i
X'm
X'i-1
X'i+1
f
g
h
Y1
Yj
Yn
Y'1
Y'n
Yj-1
Yj+1

Рис. 6.

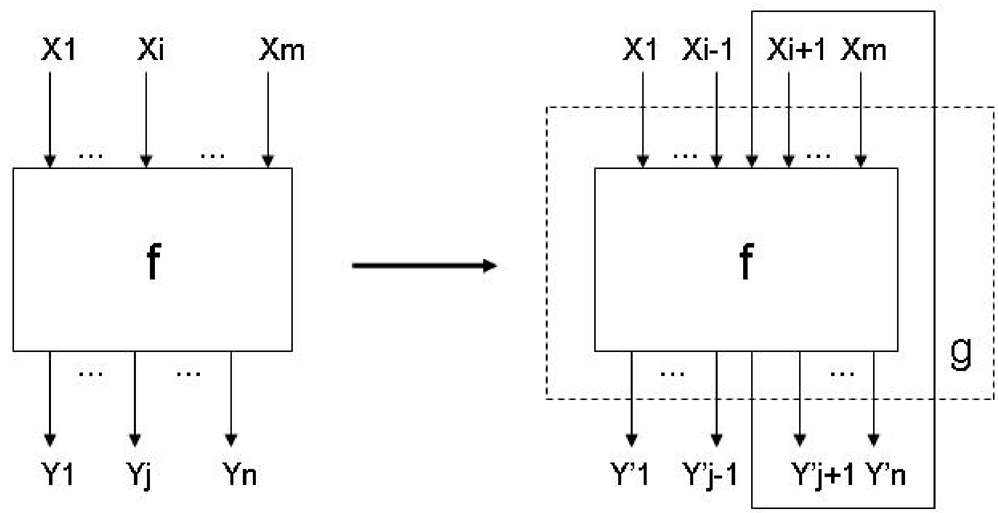
X1
Xi
Xm
f
Y1
Yj
Yn
X1
Xi-1
Xi+1
Xm
f
g
Y'1
Y'j-1
Y'j+1
Y'n

Рис. 7.

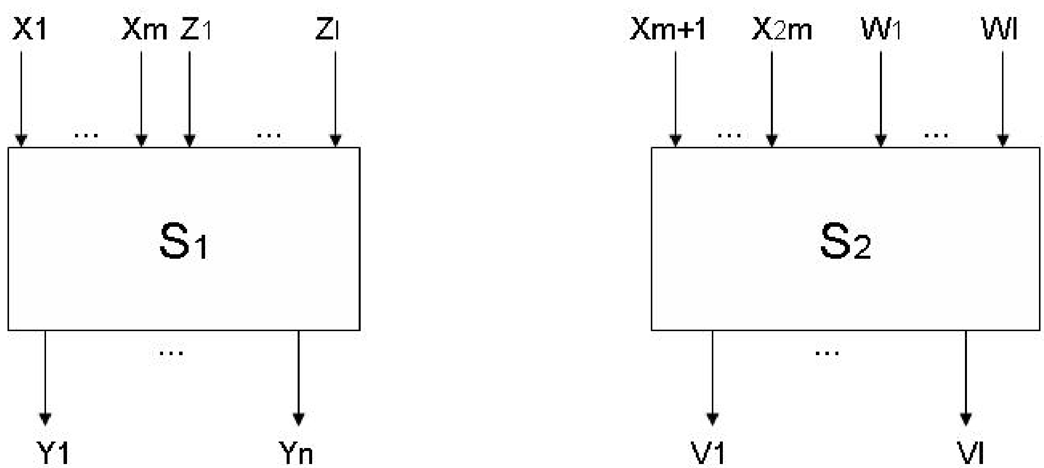
X1
Xm
Z1
Zl
S1
Y1
Yn
Xm+1
X2m
W1
Wl
S2
V1
Vl

Рис. 8.

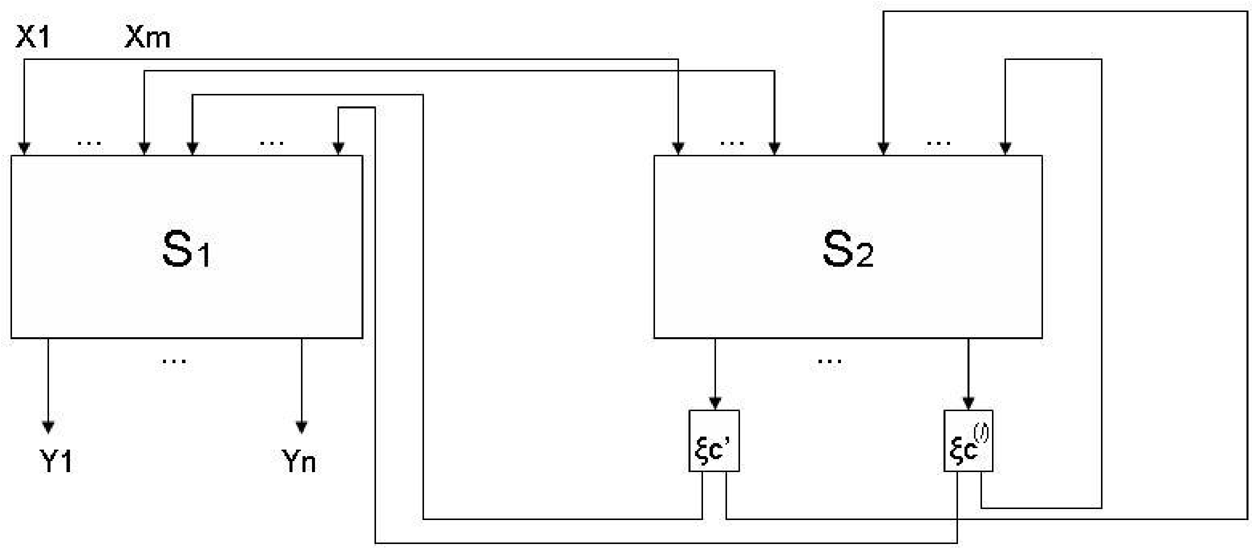

Рис. 9.